




Software para simulação do escoamento ao redor de arranjos de cilindros

Eduardo Hwang

Orientador: Júlio Romano Meneghini

São Paulo
Dezembro de 2001

Nota 9.5




**“Aos meus pais,
meus irmãos e
minha namorada”.**



AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini, e aos meus amigos Fábio Saltara, Rodrigo Fregonesi, Cássio Yamamoto, Ricardo Flatschart e Pepe pelo apoio durante a execução deste trabalho.





Índice

1 – <u>Motivação para este trabalho</u>	6
1.1 – <u>Caracterização do problema</u>	7
1.2 – <u>A escolha de uma linguagem de programação</u>	8
2 – <u>Modelagem do problema</u>	10
2.1 – <u>Método dos Vórtices Discretos</u>	11
2.2 - <u>Condições de Contorno e implementação</u>	12
2.3 – <u>Ciclo de operação do programa, Convecção e Difusão</u>	14
2.4 – <u>Amalgamação de vórtices</u>	17
2.5 – <u>Teorema de Kelvin e o Cálculo de Forças</u>	17
3 – <u>Apresentação e Discussão dos Resultados</u>	20
4 - <u>Apêndice : Equações do Método</u>	27
5 – <u>Referências Bibliográficas</u>	32



1 – Motivação para este trabalho

O presente estudo possui como objeto de interesse as chamadas vibrações induzidas por escoamento (VIE), que constituem um parâmetro de fundamental importância no projeto de estruturas oceânicas, em particular dos oleodutos denominados “risers”.

A durabilidade destes dutos é fortemente limitada pelos esforços cíclicos provenientes pela emissão alternada de vórtices, que podem provocar rompimento por fadiga.

O trabalho de programação a ser apresentado, é baseado no Método dos Vórtices Discretos, e cujo objetivo é conceber o método numérico como uma ferramenta de baixo custo computacional, que devidamente aperfeiçoada, pode no futuro fornecer informações precisas sobre o comportamento dos escoamentos sobre corpos imersos.



1.1 – Caracterização do problema

O objetivo deste trabalho é a implementação de um método computacional, sob a forma de um “software” simples e portátil, para facilitar o estudo do escoamento ao redor de cilindros.

A implementação é especialmente dirigida a este problema de corpos de geometria cilíndrica, e um de seus diferenciais pretendidos é ser capaz de resolver escoamentos com número arbitrário de cilindros, posicionados também de forma arbitrária, dependendo apenas da vontade do usuário e sem a necessidade de modificação do código-fonte e recompilação.

O programa elaborado deve apresentar a visualização do escoamento no momento em que o mesmo é calculado, bem como gráficos no tempo de forças atuantes nos cilindros, de maneira que seja possível determinar com certa praticidade, valores ótimos de espaçamento entre cilindros fixos, baseados no critério de mínimo arrasto ou interferência entre os corpos.



1.2 – A escolha de uma linguagem de programação

Tendo em vista a diversidade de linguagens de computador disponíveis, são adotados alguns critérios para selecionar a mais aplicável delas.

Da linguagem de programação selecionada, espera-se que seja rápida e altamente portátil entre diferentes arquiteturas de computador, e bastante otimizada no quesito velocidade e no gerenciamento de memória.

A linguagem escolhida também deve ser de fácil compreensão e possuir compatibilidade com bibliotecas gráficas para visualização.

Iniciando nossa busca por uma interface sólida para programação, é natural considerar linguagens como o Fortran, tradicionalmente a linguagem estruturada mais antiga, originalmente desenvolvida para aplicações científicas, mas que hoje não se apresenta tão versátil como outras linguagens mais novas, possuindo poucas opções em programação gráfica, e o mesmo pode se dizer de linguagens semelhantes como Pascal, Delphi, Modula, etc.

Embora recente e bastante famosa, Java, uma das mais novas linguagens, é dirigida a aplicações para Internet, não oferecendo no momento muitas vantagens nítidas quanto à programação científica.



Dentre todas as opções pesquisadas, a que melhor atende melhor a estes critérios é o C++. A quase totalidade dos programas hoje disponíveis no mercado foi desenvolvida em C, desde sistemas operacionais (UNIX e Windows), aplicativos de escritório, jogos e ainda muitos programas científicos.

C++ é uma evolução natural de C, e praticamente todo processador de propósito geral projetado no futuro possuirá como linguagens básicas, a linguagem de máquina (ininteligível para humanos) e a linguagem C, extremamente difundida e bem estabelecida.

Existem vantagens nítidas neste ambiente de programação: as linguagens C e C++ são ótimas para criar estruturas de dados flexíveis e de complexidade variável; são excepcionalmente rápidas e permitem um gerenciamento de memória e de operações de alto nível e de baixo nível. Este enorme potencial é bastante explorado pelos bancos de dados e pode também ser o futuro de muitos outros métodos numéricos.

A linguagem C possui uma rica e crescente biblioteca de funções, a qual foi recentemente incorporada o "OpenGL" ("Open Graphics Library"), uma poderosa ferramenta gráfica que pode ser utilizada em realidade virtual, animação gráfica e visualização científica.



2 – Modelagem do problema

O problema é considerado em duas dimensões, admitindo-se o “riser” ou oleoduto infinitamente comprido, e perpendicularmente ao seu comprimento há um escoamento que provoca o desprendimento alternado de vórtices.

A região dentro destes vórtices possui grandes velocidades e baixos valores de pressão, o que faz com que os risers sejam “puxados” para trás e alternadamente para os lados, o que provoca o arrasto e as tensões alternadas e conseqüentemente nos remetem ao problema da fadiga.

No modelo numérico, a seção transversal de cada “riser” é um cilindro, e o desprendimento de vorticidade ocorre de modo discreto, representado numericamente como a liberação e absorção de diminutos vórtices portadores de pequenos valores de circulação, e por isto denominado Método dos Vórtices Discretos.

Os cilindros são discretizados em painéis, cujos pontos de controle são os pontos onde são gerados os vórtices a cada “time-step”, ou fração de tempo. A completa modelagem do problema está posta em termos de transporte de vorticidade pelo campo de escoamento, sob a forma de geração, convecção e absorção de vórtices.



Toda a contabilidade realizada sobre as quantidades de circulação absorvidas ou emitidas (pelos cilindros) na forma de vórtices é realizada sobre os painéis que representam a discretização dos corpos.

2.1 – Método dos Vórtices Discretos

Sua principal vantagem em relação aos métodos de elementos e de volumes finitos é não ser dependente de uma malha para realizar as simulações. De modo que não são implementadas explicitamente as equações de conservação de massa, energia e quantidade de movimento.

Ao invés disso, as partículas portadoras de vorticidade são geradas, convectadas e absorvidas no campo de escoamento, através de algoritmos e de uma formulação matemática simplificada, originada da Teoria de Escoamento Potencial.

Uma outra característica interessante em métodos lagrangeanos é a possibilidade de visualizar em detalhes o comportamento de cada partícula através do tempo, o que pode inclusive revelar aspectos mais locais do escoamento, e que não podem ser detectados nos métodos eulerianos. Além disso, ao seguir as partículas de vorticidade estamos concentrando todo poder computacional em áreas de maiores gradientes de velocidade no escoamento.



A principal desvantagem do Método de Vórtices Discretos é o crescimento quadrático do tempo de processamento com o número de vórtices. Cada vórtice influencia todos os outros com exceção dele mesmo, exigindo aproximadamente N^2 operações a cada ciclo, com N sendo o número de vórtices, e lembrando que este número N aumenta à medida que são gerados mais vórtices.

Todavia, novas pesquisas em otimização de algoritmos apontam para associações do Método de Vórtices Discretos com os chamados Métodos Rápidos de Multipolos ("Fast Multipole Methods"), um algoritmo que permite rapidamente agrupar os vórtices em grupos coesos e calcular a influência entre grupos de vórtices, ao invés de computar vórtice a vórtice.

Esta classe de novos algoritmos é um refinamento de métodos de busca binária aplicados a sistemas de partículas, cujo tempo de processamento é $N \cdot \log(N)$. A implementação deste algoritmo é um possível novo rumo para a continuidade deste trabalho, que só não será aqui abordada devido ao elevado grau de complexidade para ser desenvolvido em pouco tempo.

2.2 - Condições de Contorno e implementação

A implementação do algoritmo é baseada na função de corrente da teoria de escoamento potencial complexo, na qual os cilindros são modelados como conjuntos de painéis e emitem/absorvem vórtices em



sua superfície. A convecção destes vórtices é simples e corresponde à aplicação da Lei de Biot-Savart, e a velocidade com que um vórtice se move é igual à soma das velocidades induzidas por todos os outros vórtices e pelo escoamento ao longe.

A condição de contorno do problema é tal que todos os painéis de um mesmo corpo (cilindro) pertençam a uma única linha de corrente, o que garante que não há velocidade normal na superfície do corpo, ou seja, este não emite nem absorve massa, mas apenas vorticidade/circulação.

Juntamente a esta condição, é aplicado o Teorema de Kelvin, ou Lei da conservação de Circulação, estabelecendo não ser possível criar ou destruir circulação líquida positiva ou negativa num volume de controle fechado, que envolve o corpo e estende-se ao infinito. O Teorema de Kelvin consiste de uma equação adicional de circulação para cada corpo.

Para atender a estas condições de contorno, o corpo emite circulação na forma de vórtices discretos, cuja distribuição é obtida através da resolução de um sistema linear.

A condição de contorno do problema, somada ao uso do Teorema de Kelvin origina um sistema linear com mais equações que incógnitas, que é resolvido através do método de mínimos quadrados.



2.3 – Ciclo de operação do programa, Convecção e Difusão

O ciclo do programa é iniciado com a resolução do sistema linear, que permite calcular a distribuição de circulação na superfície do corpo, seguida da criação dos vórtices, e convecção e difusão dos mesmos.

Os esquemas de convecção utilizados são de primeira e segunda ordem, sendo o esquema de 1ª ordem aplicado a vórtices recém criados, e o de 2ª ordem para os vórtices livres na esteira, considerando efeitos de aceleração sobre os mesmos.

Esquema de Convecção de 1a ordem

$$\begin{aligned}x^{t+\Delta t} &= x^t + (u^t) \cdot \Delta t \\y^{t+\Delta t} &= y^t + (v^t) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Esquema de Convecção de 2a ordem (considera aceleração)

$$\begin{aligned}x^{t+\Delta t} &= x^t + (1.5 \cdot u^t - 0.5 \cdot u^{t-\Delta t}) \cdot \Delta t \\y^{t+\Delta t} &= y^t + (1.5 \cdot v^t - 0.5 \cdot v^{t-\Delta t}) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Esquema de Convecção de 3a ordem (considera derivada da aceleração)

$$\begin{aligned}x^{t+\Delta t} &= x^t + (w_1 \cdot u^t + w_2 \cdot u^{t-\Delta t} + w_3 \cdot u^{t-2\Delta t}) \cdot \Delta t \\y^{t+\Delta t} &= y^t + (w_1 \cdot v^t + w_2 \cdot v^{t-\Delta t} + w_3 \cdot v^{t-2\Delta t}) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

$$\text{com: } w_1 = 3/2 + 1/6, \quad w_2 = -1/2 - 1/3 \quad \text{e} \quad w_3 = 1/6$$



Uma das opções adicionais do programa é dividir a convecção em passos menores, e melhorando consideravelmente a nitidez da esteira. Quando ativada esta subdivisão, não são criados mais vórtices entre estas sub-convecções, o que torna possível o armazenamento de dados para realizar convecções de 3ª ordem, sem a necessidade de atualizar as várias estruturas de dados. (A geração de novos vórtices implica numa seqüência intrincada de atualizações, e por isso é realizada somente quando necessária).

A difusão da circulação efetivamente implementada é simulada numericamente por um aumento de uma região circular em torno de cada vórtice ("core-spreading"), na qual a velocidade induzida pelo vórtice é proporcional à distância. Em todo o espaço restante a velocidade induzida por este vórtice será aproximadamente proporcional ao inverso da distância.



A equação abaixo fornece a velocidade induzida por um vórtice num ponto genérico, cuja coordenada radial em relação ao vórtice é expressa pela variável r .

Lei de Biot Savart para um vórtice com núcleo viscoso (2D)

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r}{r^2 + \sigma_0^2}$$

V_{θ} : Velocidade tangencial

Γ : Circulação do vórtice

r : coordenada radial de um ponto do escoamento em relação ao vórtice

σ_0 : raio da região circular onde o escoamento se assemelha à rotação de um corpo rígido (proporcional à distância radial)

Difusão de Circulação ("Core Spreading Method")

$$\sigma_0^2(t+\Delta t) = \sigma_0^2(t) + 4.946 \cdot \nu \cdot \Delta t$$

Há um ponto importante com relação a este modelo de difusão: a forma de aproximação proposta pelo "spreading core" no Método dos Vórtices Discretos não converge para as Equações de Navier-Stokes, devido ao fato de ser uma aproximação linear e não considerar corretamente os termos convectivos. Para que a convergência seja de fato atingida, é necessário particionar os vórtices que cresceram além de um limite em vórtices menores com frações de sua vorticidade.

Uma alternativa seria a difusão através do "Random Walk", na qual os vórtices se movimentam aleatoriamente, e o método converge estatisticamente para a solução da Equação de Navier-Stokes.



2.4 – Amalgamação de vórtices

Como já foi mencionado anteriormente, uma séria limitação à implementação de métodos lagrangeanos é o crescimento quadrático do número de operações com o aumento do número de partículas envolvidas.

Para evitar que uma simulação consuma tempo demasiado, foram estudadas diferentes formas de contornar o problema, e a solução escolhida é também das mais simples: vórtices próximos entre si, e que se encontram muito longe dos cilindros, podem ser substituídos por um único vórtice. Este procedimento de amalgamação de vórtices é consistente fisicamente, visto que a influência de um vórtice a um ponto qualquer diminui com a distância (Lei de Biot-Savart).

A amalgamação é uma das formas mais simples e fisicamente aceitáveis para barrar o crescimento do tempo computacional.

2.5 – Teorema de Kelvin e o Cálculo de Forças

O grande objetivo deste trabalho está em consolidar a implementação dos Vórtices Discretos como uma ferramenta capaz de



predizer os coeficientes de forças atuantes sobre corpos presentes no escoamento.

Existe um teorema que faz a ligação entre a circulação absorvida/emitida com o campo de pressões. Ele afirma que a variação de pressão ao longo de um contorno é igual à integral da taxa de variação da circulação ao longo do contorno (circulação absorvida sobre dt), multiplicada pelo peso específico do fluido em questão.

$$p_{i+1} = p_i + \int \frac{d\Gamma}{dt} \cdot dl$$

$$p_{i+1} = p_i + \sum \frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} \cdot dl$$

Fórmulas de conexão entre a pressão e a taxa de absorção de circulação

Para atribuir um aspecto mais físico a este teorema, recordemos que a integral de pressão ao longo de um contorno fechado é igual a zero, caso contrário um mesmo ponto do corpo possuiria dois valores diferentes de pressão.

Prosseguindo com o raciocínio, se a integral de pressão no contorno deve ser igual a zero, a integral das circulações trocadas deve ser igual a zero, ou seja, a circulação líquida que um corpo emite/acumula é igual a zero, encaixando perfeitamente ao Teorema de Kelvin, o qual estabelece não ser possível a acumulação de uma circulação líquida por um corpo.



Existindo vorticidade positiva ou negativa, ela está restrita ao fluido, seja num vórtice convectado, ou na camada limite, mas nunca dentro de um corpo sólido.

A partir deste ponto fica mais claro compreender como é efetuado o cálculo de forças. Cada um dos vórtices absorvidos incide sobre um painel do cilindro; a este painel fica associado um valor de circulação que este absorveu num dado passo de tempo (“time-step”), ou emitiu como um vórtice discreto.

O valor de pressão associado ao ponto naquele dado instante é igual à pressão do ponto adjacente, mais a contribuição da integral anteriormente referida.

O passo seguinte é integrar a pressão nas fronteiras do cilindro, fornecendo os coeficientes de forças atuantes, através das seguintes fórmulas.

Cálculo dos coeficientes de forças - n_x e n_y são componentes do vetor normal a um painel

$$C_d = \frac{\sum p \cdot n_x \cdot dl}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2}$$

$$C_l = \frac{\sum p \cdot n_y \cdot dl}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2}$$

3 – Apresentação e Discussão dos Resultados

O programa desenvolvido é capaz de realizar simulações para qualquer número de cilindros e qualquer Número de Reynolds especificado pelo usuário.

Além da visualização do escoamento, o programa realiza o cálculo de coeficientes de arrasto em cada cilindro, nas direções x e y, e abre uma janela separada para apresentação das séries temporais para um cilindro em destaque, o qual pode ser escolhido simplesmente pressionando-se uma tecla.

As visualizações abaixo foram escolhidas com Número de Reynolds mais baixo pela sua melhor nitidez. Para obter a mesma qualidade gráfica com valores mais altos de Reynolds, seriam necessários muito mais pontos e consideravelmente maior tempo de processamento.

As figuras abaixo (01, 02 e 03) são de um escoamento sobre um cilindro, com número de Reynolds 200 e convecção de 1ª ordem.

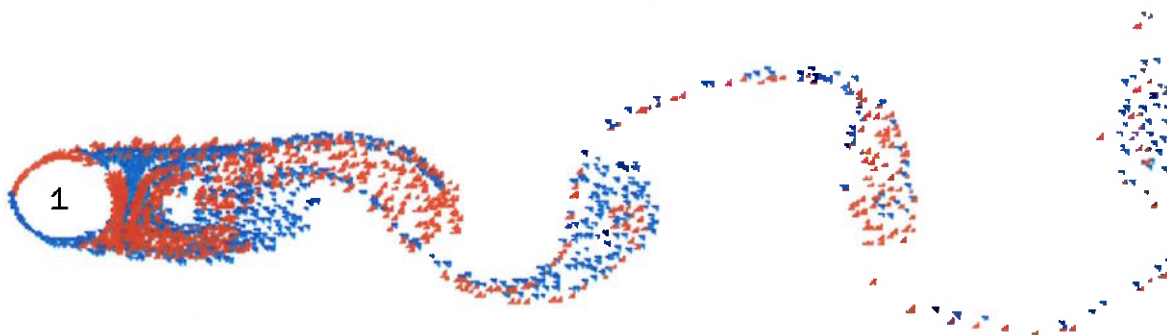


figura 01, convecção de 1ª ordem, $Re=200$

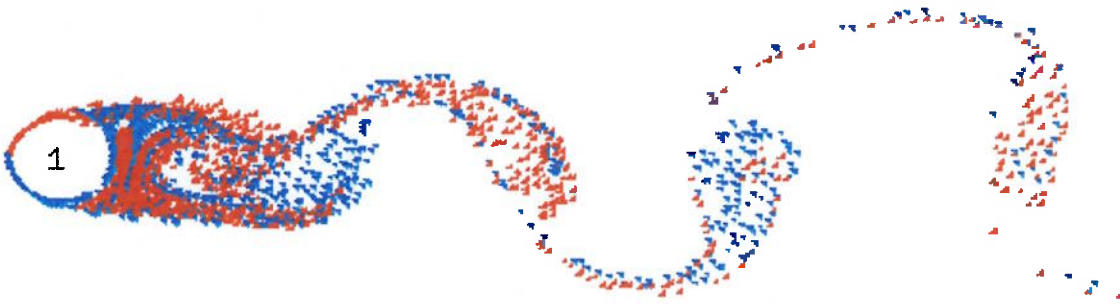


figura 02, convecção de 1ª ordem, $Re=200$

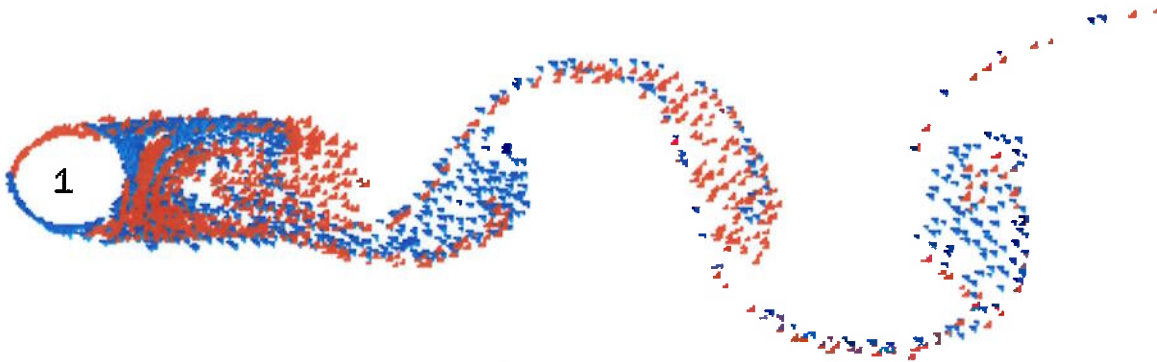


figura 03, convecção de 1ª ordem, $Re=200$

As figuras a seguir são também visualizações do escoamento com $Re=200$, porém utilizando convecção de 2ª e 3ª ordem, e 1ª ordem para vórtices recém-criados.

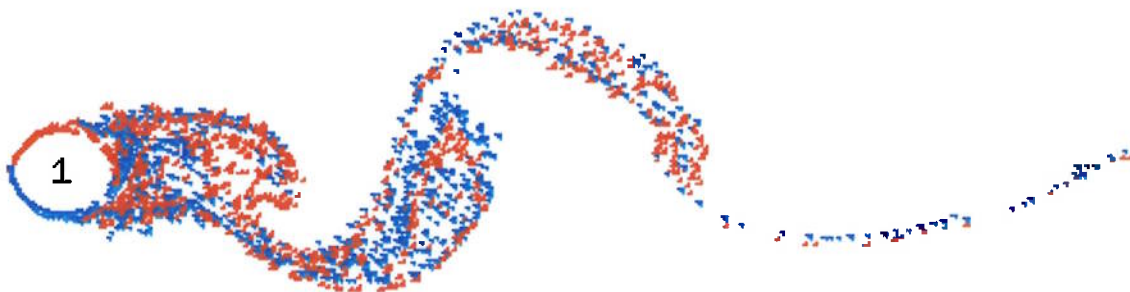


figura 04, convecção de ordem superior, $Re=200$

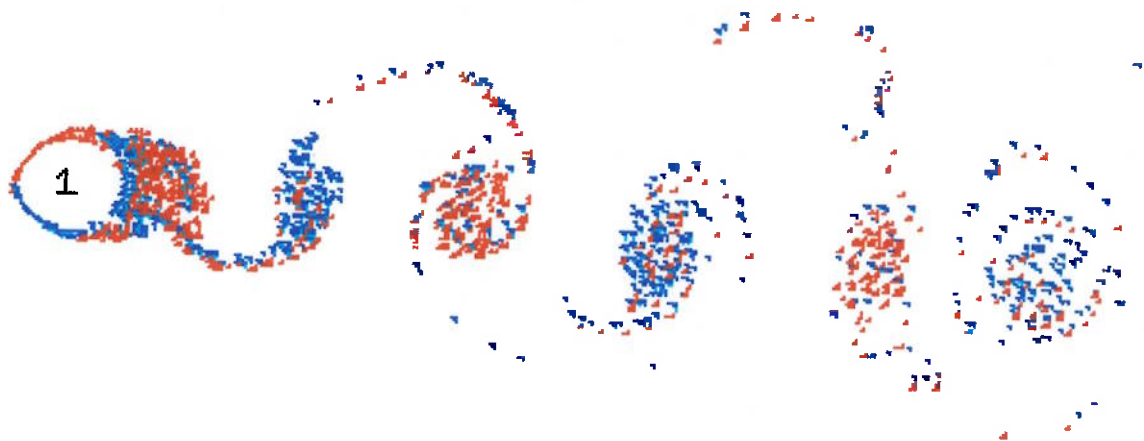


figura 05, convecção de ordem superior, $Re=200$



figura 06, convecção de ordem superior, $Re=200$

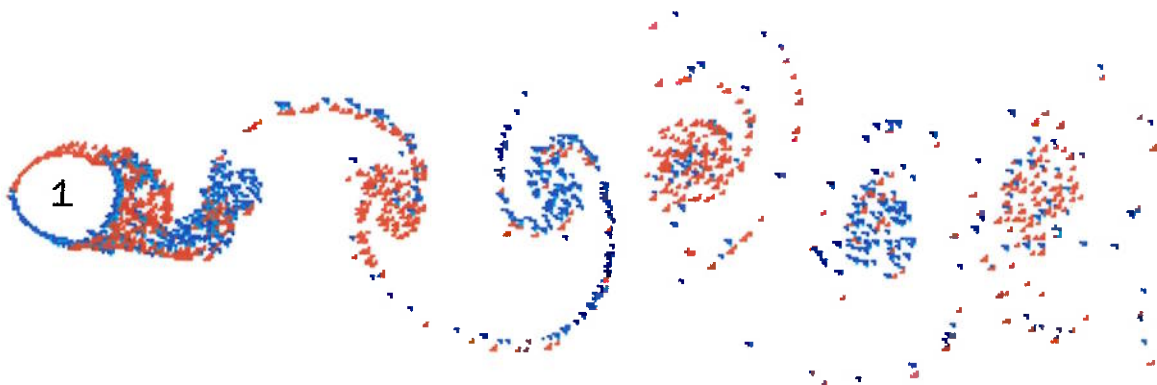


figura 07, convecção de ordem superior, $Re=200$



Comparando as três primeiras figuras com as quatro seguintes, é fácil notar que interpolações de ordem superior (combinação de 1^a, 2^a e 3^a ordens) na convecção melhoram muito o nível de detalhe dos vórtices que se desprendem do cilindro.

Ambas as implementações apontam valores muito próximos do real para a frequência adimensional de desprendimento de vórtices: o chamado Número de Strouhal, cujo valor experimental é $St = 0.2$, para uma larga faixa de Números de Reynolds.

Número de Strouhal

$$St = \frac{n \cdot U_{\infty}}{D}$$

n : frequência de emissão de vórtices (Hz)

U_{∞} : Velocidade do escoamento ao longe (m / s)

D : diâmetro do cilindro (metros)

As simulações de 1^a ordem estimam $St = 0.195$, enquanto que as de ordem superior fornecem aproximadamente $St = 0.215$, ambos valores razoavelmente bons.

Contudo, existe um último ponto importante a ser esclarecido. O coeficiente de arrasto médio obtido deveria ser $Cd = 1.2$ (valor experimental, $Re = 1 \times 10^5$). Este valor é confirmado na simulação de 1^a ordem $Cd = 1.27$ (1^a ordem, $Re = 1 \times 10^5$), mas não pelo algoritmo mais complexo, $Cd = 1.75$ (1^a, 2^a e 3^a ordens, $Re = 1 \times 10^5$).



Este fato também foi apontado por algumas outras implementações do Método dos Vórtices Discretos, não sendo o presente programa a única ocorrência. Isto levanta a seguinte questão: é possível que os esquemas de convecção de ordens mais altas estejam errados?

A começar pela própria definição dos algoritmos, a interpolação de ordens superiores na convecção considera acelerações e derivadas das acelerações das partículas, fato completamente negligenciado na convecção de 1ª ordem. Visualmente percebe-se que o aumento de complexidade no programa conduz a um melhor detalhamento do escoamento.

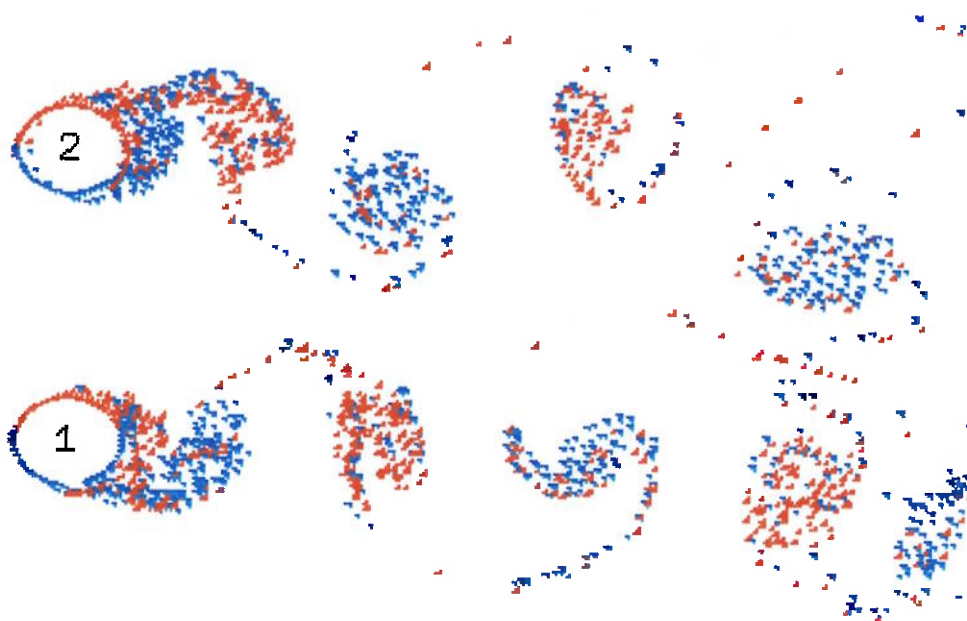
A não concordância dos coeficientes de arrasto experimental e simulado pode ser devida ao fato de que computacionalmente possui-se um modelo rigorosamente bidimensional, que desconsidera o transporte de vorticidade na direção longitudinal do "riser".

Por esta óptica, o modelo de ordem superior apresentado apenas se aproxima da realidade, enquanto o de 1ª ordem atinge o resultado desejado, não por ser mais consistente fisicamente, mas porque dois erros de naturezas distintas acabaram por se compensar: o não transporte de vorticidade na 3ª dimensão e o cálculo de trajetória dos vórtices sem as acelerações.

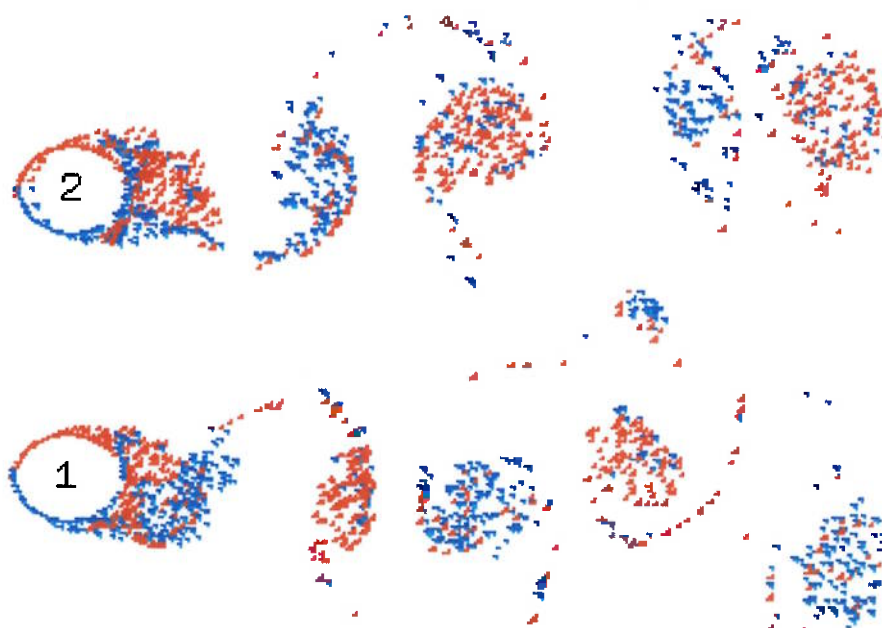
Esta conclusão não desmerece o método numérico, mas incentiva novas implementações do mesmo na forma tridimensional. Métodos



eulerianos tradicionalmente seriam incapazes da mesma riqueza de detalhes das figuras apresentadas, e com o aperfeiçoamento do Método dos Vórtices Discretos é bastante provável o surgimento de um simulador de propósito geral baseado na formulação lagrangeana.



figuras 08 e 09, convecção de ordem superior, cilindros lado a lado, distância de dois diâmetros, $Re=200$



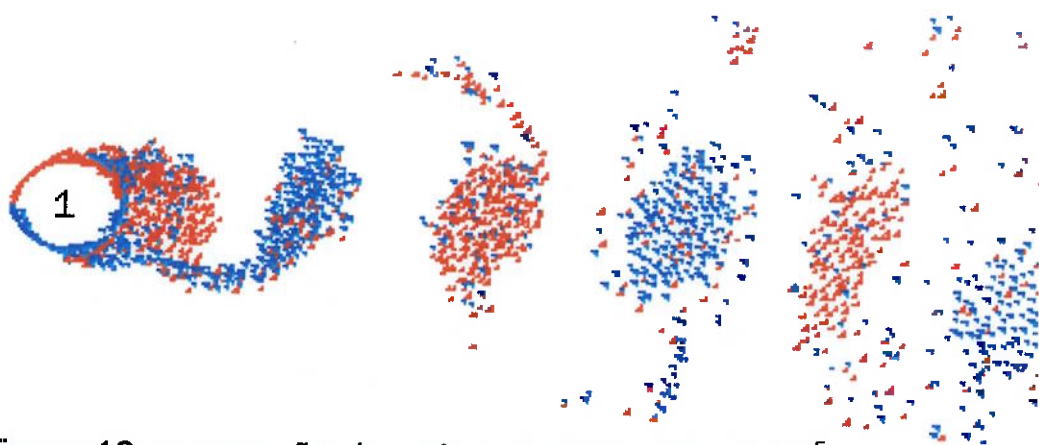


figura 10, convecção de ordem superior, $Re=2 \times 10^5$.

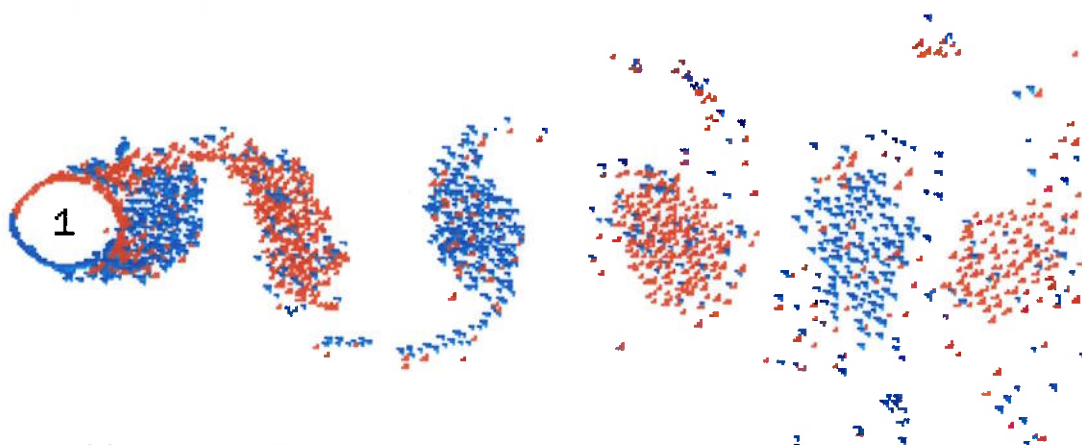


figura 11, convecção de ordem superior, $Re=2 \times 10^5$.

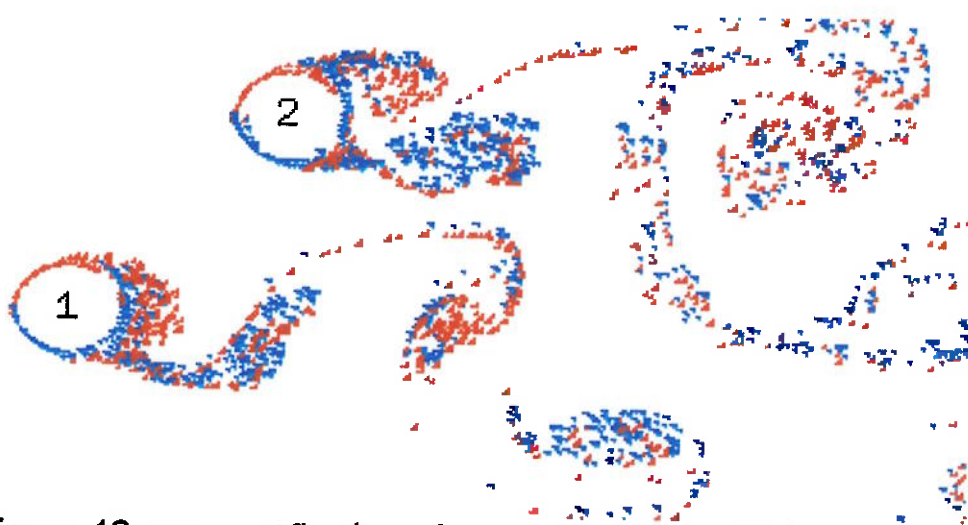


figura 12, convecção de ordem superior, $Re=200$



4 - Apêndice : Equações do Método

Função de Corrente ψ e Vorticidade ω

As equações abaixo servem como uma ponte de ligação entre a função de corrente e a vorticidade:

$$\psi = \int u \cdot dy - v \cdot dx$$

$$d\psi = u \cdot dy - v \cdot dx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

$$\nabla \times \vec{V} = \omega = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad [\text{Equação de Poisson}]$$

Potencial de Velocidade

$$\vec{V} = \text{grad} \phi$$

Equação da Continuidade, fluido incompressível

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad [\text{Equação de Laplace}]$$



As equações da página anterior são a formulação do problema de escoamento incompressível como sendo um problema linear, no qual podemos utilizar vórtices, que são soluções da Equação de Laplace, para transportar vorticidade (da Equação de Poisson), e representar a Função de Corrente como uma superposição linear, o que é permitido pois ambas equações diferenciais são lineares

Modelo de Vórtice utilizado ("Blob Vortex")

A equação abaixo fornece a velocidade e induzida por um vórtice num ponto genérico, cuja coordenada radial em relação ao vórtice é expressa pela variável r .

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r}{r^2 + \sigma_0^2}$$

V_{θ} : Velocidade tangencial

Γ : Circulação do vórtice

r : coordenada radial de um ponto do escoamento em relação ao vórtice

σ_0 : raio da região circular onde o escoamento se assemelha à rotação de um corpo rígido
(proporcional à distância radial)

A próxima equação faz parte da Teoria de Escoamento Potencial Complexo, onde a parte real corresponde ao potencial propriamente dito, e a parte imaginária à função de corrente.

$$\Omega = \varphi + i \cdot \psi$$

Ω = Função Potencial Complexo

φ = Potencial do escoamento

ψ = Função de Corrente

Função de Corrente num painel i : contribuições da corrente ao longe, vórtices ligados aos cilindros, e vórtices livres

$$\psi = \text{Im}[z_{wi} \cdot (U - i \cdot V)] - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_j \cdot \ln(|z_{wi} - z_{cj}|^2 + \sigma^2) - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k \cdot \ln(|z_{wi} - z_k|^2 + \sigma^2)$$



Sistema Linear obtido com a imposição de dois pontos adjacentes no corpo pertencerem à mesma linha de corrente ("Streamline")

$$\sum_{j=1}^{N_w} A_{ij} \cdot \Gamma_j = B_i$$

$$A_{ij} = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{|z_{w(i+1)} - z_{c(j)}|^2 + \sigma_0^2}{|z_{w(i)} - z_{c(j)}|^2 + \sigma_0^2}$$

$$B_i = \text{Im}[(z_{w(i+1)} - z_{w(i)}) \cdot (U - i \cdot V)] - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{k=1}^{N_f} \Gamma_k \cdot \ln \frac{|z_{w(i+1)} - z_{(k)}|^2 + \sigma_0^2}{|z_{w(i)} - z_{(k)}|^2 + \sigma_0^2}$$

A_{ij} : Matriz de Acoplamento dos pontos na superfície dos corpos

B_i : Vetor de Influência do escoamento ao longe e dos vórtices livres sobre os corpos

Γ_i : Vetor Circulação dos Vórtices a serem criados

z_w : coordenada complexa dos pontos de controle na superfície do corpo

(onde é aplicada a condição de linha de corrente única para os pontos de um corpo)

z_c : coordenada complexa dos vórtices a serem criados

(os vórtices são criados a uma distância δ acima dos pontos de controle)

$z_{(k)}$: coordenada complexa dos vórtices livres no escoamento

N_w : Número de pontos de controle na superfície dos corpos

(= Número de Vórtices Criados a cada iteração)

N_f : Número de Vórtices Livres ("freestream")

U : Componente Horizontal de Velocidade

V : Componente Vertical de Velocidade

Teorema de Kelvin (aplicado individualmente a cada um dos cilindros)

$$\sum_{j=1}^{Ncr} \Gamma_j + \sum_{k=1}^{Nabs} \Gamma_k = 0 \quad , \text{ onde } Ncr : \text{Número de Vórtices ligados, a serem criados pelo cilindro}$$

$Nabs$: Número de Vórtices absorvidos pelo cilindro



Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados - obtenção de um sistema linear possível e determinado, a partir de um conjunto com mais equações que incógnitas

$$(A^T \cdot A) \cdot \Gamma = A^T \cdot B$$

$$\Gamma = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Os itens abaixo são referentes ao processo de convecção dos vórtices, que de fato é o processo de integração da trajetória de uma partícula no esquema de resolução lagrangeano.

A posição da partícula é incrementada a cada instante de tempo, sendo o incremento calculado através das velocidades induzidas sobre ela e do incremento de tempo Δt .

Esquema de Convecção de 1a ordem

$$x^{t+\Delta t} = x^t + (u^t) \cdot \Delta t \quad y^{t+\Delta t} = y^t + (v^t) \cdot \Delta t$$

Esquema de Convecção de 2a ordem (considera aceleração)

$$x^{t+\Delta t} = x^t + (1.5 \cdot u^t - 0.5 \cdot u^{t-\Delta t}) \cdot \Delta t$$
$$y^{t+\Delta t} = y^t + (1.5 \cdot v^t - 0.5 \cdot v^{t-\Delta t}) \cdot \Delta t$$

Esquema de Convecção de 3a ordem (considera derivada da aceleração)

$$x^{t+\Delta t} = x^t + (w_1 \cdot u^t + w_2 \cdot u^{t-\Delta t} + w_3 \cdot u^{t-2\Delta t}) \cdot \Delta t$$
$$y^{t+\Delta t} = y^t + (w_1 \cdot v^t + w_2 \cdot v^{t-\Delta t} + w_3 \cdot v^{t-2\Delta t}) \cdot \Delta t$$

$$\text{com: } w_1 = 3/2 + 1/6, \quad w_2 = -1/2 - 1/3 \quad \text{e} \quad w_3 = 1/6$$



Equação da velocidade induzida por um vórtice, na coordenada r e tempo t

(equação obtida de uma solução da Equação de Navier - Stokes para um vórtice)
(não utilizada diretamente na programação do método)

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{r^2}{4 \cdot \nu \cdot t}\right) \right)$$

Aproximação Numérica do Efeito de Difusão de Circulação
(originária da equação acima)

$$\sigma_0^2(t+\Delta t) = \sigma_0^2(t) + 4.946 \cdot \nu \cdot \Delta t \quad \nu : \text{viscosidade cinemática}$$

Fórmulas de Amalgama

$$\Gamma_{i+j} = \Gamma_i + \Gamma_j \quad (x, y, \sigma_0)_{i+j} = \frac{(x, y, \sigma_0)_i \cdot \Gamma_j + (x, y, \sigma_0)_j \cdot \Gamma_i}{\Gamma_{i+j}}$$

Critério de Amalgamação : dois vórtices são unidos num único quando a relação abaixo é satisfeita; D_0 e V_0 são parâmetros de controle, da ordem de $1e-7$, e 0.05 respectivamente.

Um valor pequeno de D_0 suprime amalgamação perto dos cilindros e V_0 é utilizado como uma variável que limita o número máximo de vórtices

$$\frac{\|\Gamma_i \cdot \Gamma_j\|}{\|\Gamma_i + \Gamma_j\|} \cdot \frac{\|z_i - z_j\|}{(D_0 + d_i)^{1.5} \cdot (D_0 + d_j)^{1.5}} < V_0$$

Fórmulas do Cálculo de Pressões (formas contínua e discreta)

$$p_{i+1} = p_i + \int \frac{d\Gamma}{dt} \cdot dl \quad p_{i+1} = p_i + \sum \frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} \cdot dl$$

Cálculo de coeficientes de forças de arrasto e sustentação

$$C_d = \frac{\sum p \cdot n_x \cdot dl}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{\infty}^2} \quad C_l = \frac{\sum p \cdot n_y \cdot dl}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_{\infty}^2}$$



5 – Referências Bibliográficas

- [1] – PARK, W.C. AND HIGUCHI, H. 1989 Computation of flow past single and multiple bluff bodies by a vortex tracing method. Report University of Minnesota Supercomputer Institute, UMSI 89/88.
- [2] – Meneghini, J.R. 1993 Numerical simulation of bluff body flow control using a discrete vortex method. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering, University of London and for the Diploma of Imperial College.
- [3] – SPALART, P.R. AND LEONARD, A. 1981 Computation of separated flows by a vortex tracing algorithm. Paper presented at AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, June 23-25, 1981, Palo Alto, California.
- [4] – TAYLOR, I. AND VEZZA M., 1999 Prediction of unsteady flow around square and rectangular section cylinders using a discrete vortex method. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.
- [5] – LEWIS, R.I., 1991 Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems, Cambridge University Press.
- Páginas da Internet relacionadas a métodos hierárquicos de resolução de problemas em formulação lagrangeana
- [6] – <http://www.maths.napier.ac.uk/gavin/nbody.html>
- [7] – <http://citeseer.nj.nec.com/39765.html>
- [8] – <http://citeseer.nj.nec.com/board95scalable.html>